Método de Eliminação de Gauss

Laura Goulart

UESB

21 de Novembro de 2013

Motivação

O Método de Eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema original em um sistema triangular equivalente, por meio de operações elementares, zerando alguns elementos conforme abaixo mostrado:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

zerar estes elementos

Operações Elementares

As operações elementares, citadas abaixo, podem ser realizadas tanto em matrizes como sistemas lineares:

Operações Elementares

As operações elementares, citadas abaixo, podem ser realizadas tanto em matrizes como sistemas lineares:

1. Trocar duas linhas $(L_i \leftrightarrow L_j;)$

Operações Elementares

As operações elementares, citadas abaixo, podem ser realizadas tanto em matrizes como sistemas lineares:

1. Trocar duas linhas $(L_i \leftrightarrow L_j;)$
2. Multiplicar uma linha por uma constante real não nula $(L_i \rightarrow \alpha L_i)$;

Operações Elementares

As operações elementares, citadas abaixo, podem ser realizadas tanto em matrizes como sistemas lineares:

1. Trocar duas linhas $(L_i \leftrightarrow L_j;)$
2. Multiplicar uma linha por uma constante real não nula $(L_i \rightarrow \alpha L_i)$;
3. Substituir uma linha pela soma dela por outra previamente multiplicada por uma constante real não nula $(L_i \rightarrow L_i + \alpha L_j)$.

Matriz Completa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right]$$

No método de Eliminação de Gauss procura-se anular a cada etapa uma variável. Essa eliminação é efetuada por colunas e a k-ésima etapa do método será eliminar a variável x_k com $1 \leq k \leq n-1$, onde a etapa $k=0$ representa a matriz completa inicial e n é o número de variáveis. Denotaremos por $a_{ij}^{(k)}$ o coeficiente a_{ij} na k-ésima etapa.

1a. Etapa

Na primeira etapa, para cada elemento não nulo abaixo de $a_{11}^{(0)}$, chamado de pivô da $1^{\underline{a}}$ etapa, procura-se o múltiplo adequado de forma anular esse elemento, ie, da linha i substraímos a $1^{\underline{a}}$ equação multiplicada por

$m_i1 = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, chamado de multiplicador, para todo $i = 2, 3, \cdots, n$.

pivô

Zerar esses elementos utilizando o multiplicador

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right]$$

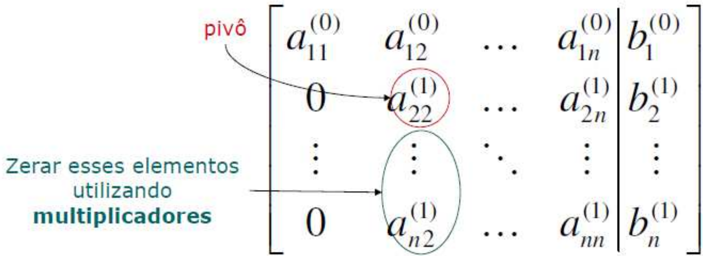
Ao final desta etapa teremos a seguinte matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

2a. etapa

Na segunda etapa, para eliminar a variável x_2, repetimos o procedimento anterior tomando a segunda linha como auxiliar no processo de eliminição.

Os multiplicadores desta etapa serão os elementos $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ para $i = 3, 4, \cdots, n$.



Formulas do Método da Eliminação de Gauss

Em geral, as fórmulas do Método de Eliminação de Gauss são:

Formulas do Método da Eliminação de Gauss

Em geral, as fórmulas do Método de Eliminação de Gauss são:

1. $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$, onde $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ é chamado de *multiplicador* e o termo a_{kk} é chamado de *pivô* da k-ésima etapa.

Formulas do Método da Eliminação de Gauss

Em geral, as fórmulas do Método de Eliminação de Gauss são:

1. $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$, onde $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ é chamado de *multiplicador* e o termo a_{kk} é chamado de *pivô* da k-ésima etapa.
2. $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{ik} \cdot b_k^{(k-1)}, \forall i, j = k+1, \ldots, n$

Substituição Retroativa

Ao final chegamos ao sistema triangular inferior abaixo que é resolvido por meio de substituições retroativas:

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(n-1)}x_n = b_1^{(n-1)} \\ a_{21}^{(n-1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(n-1)}x_n = b_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

Exemplo

Resolva o sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ pelo método de Eliminação de Gauss.